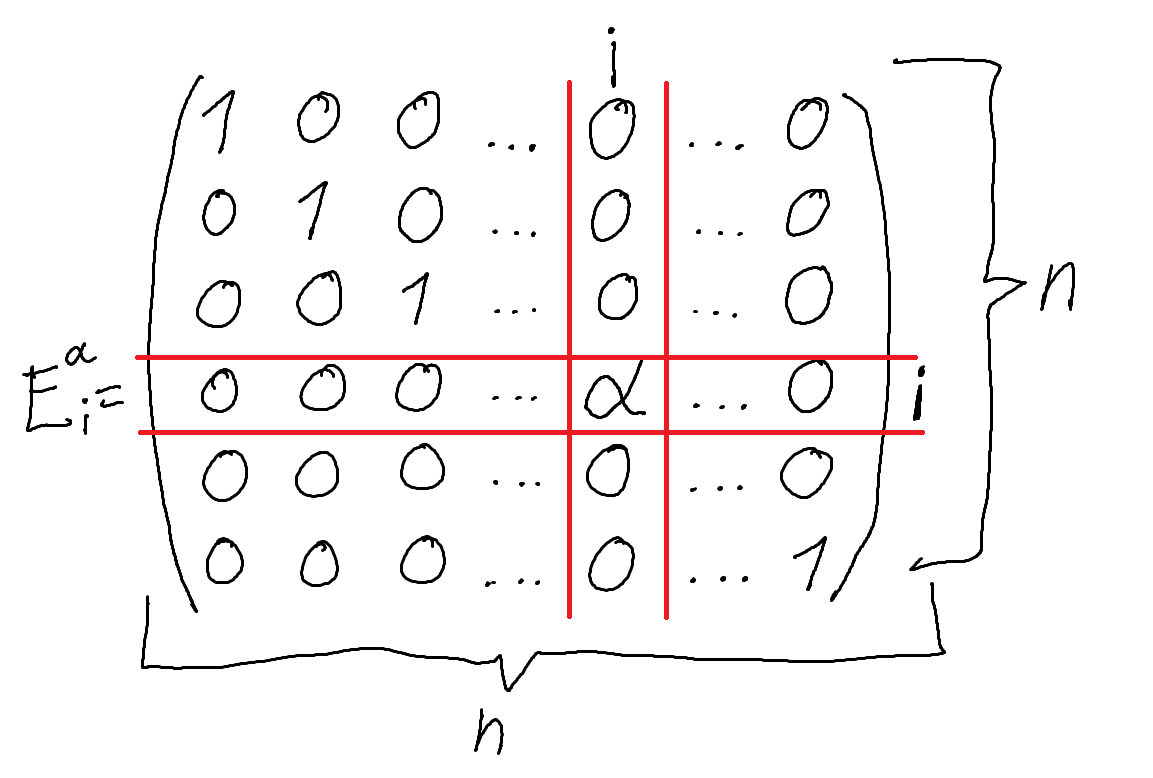
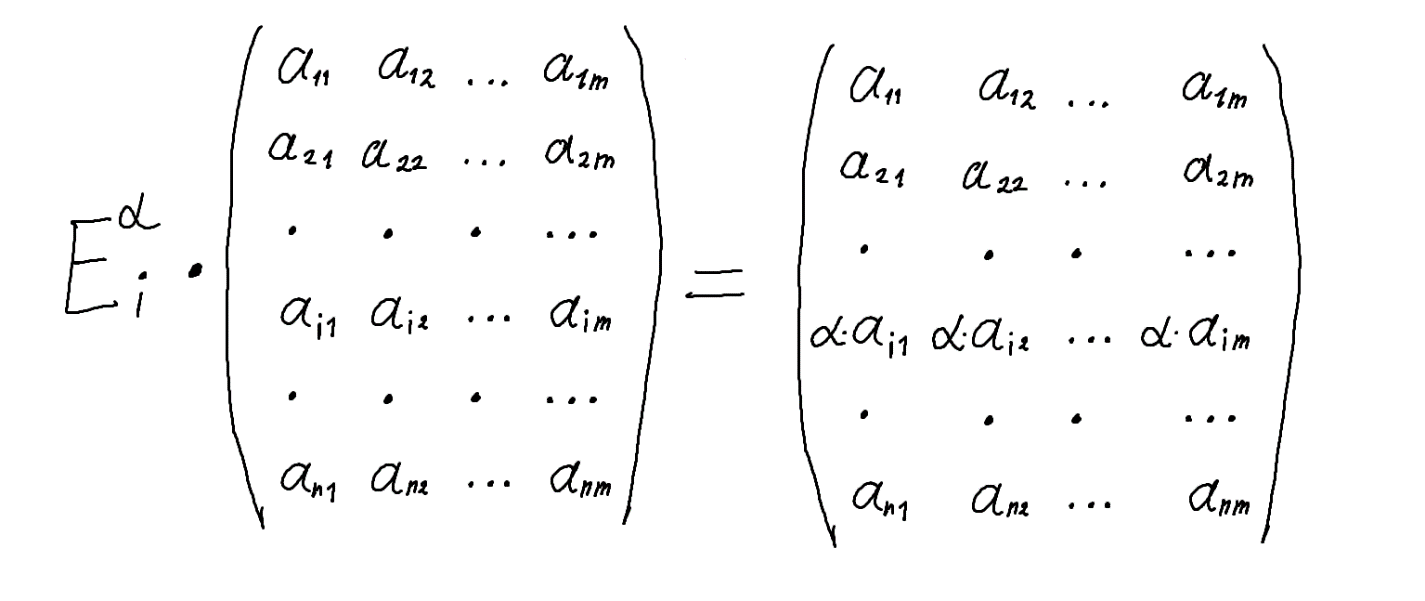
## Элементарные матрицы и элементарные преобразования

Есть элементарные матрицы 3-х видов:

1. Элементарными матрицами **первого рода** называют матрицы вида:

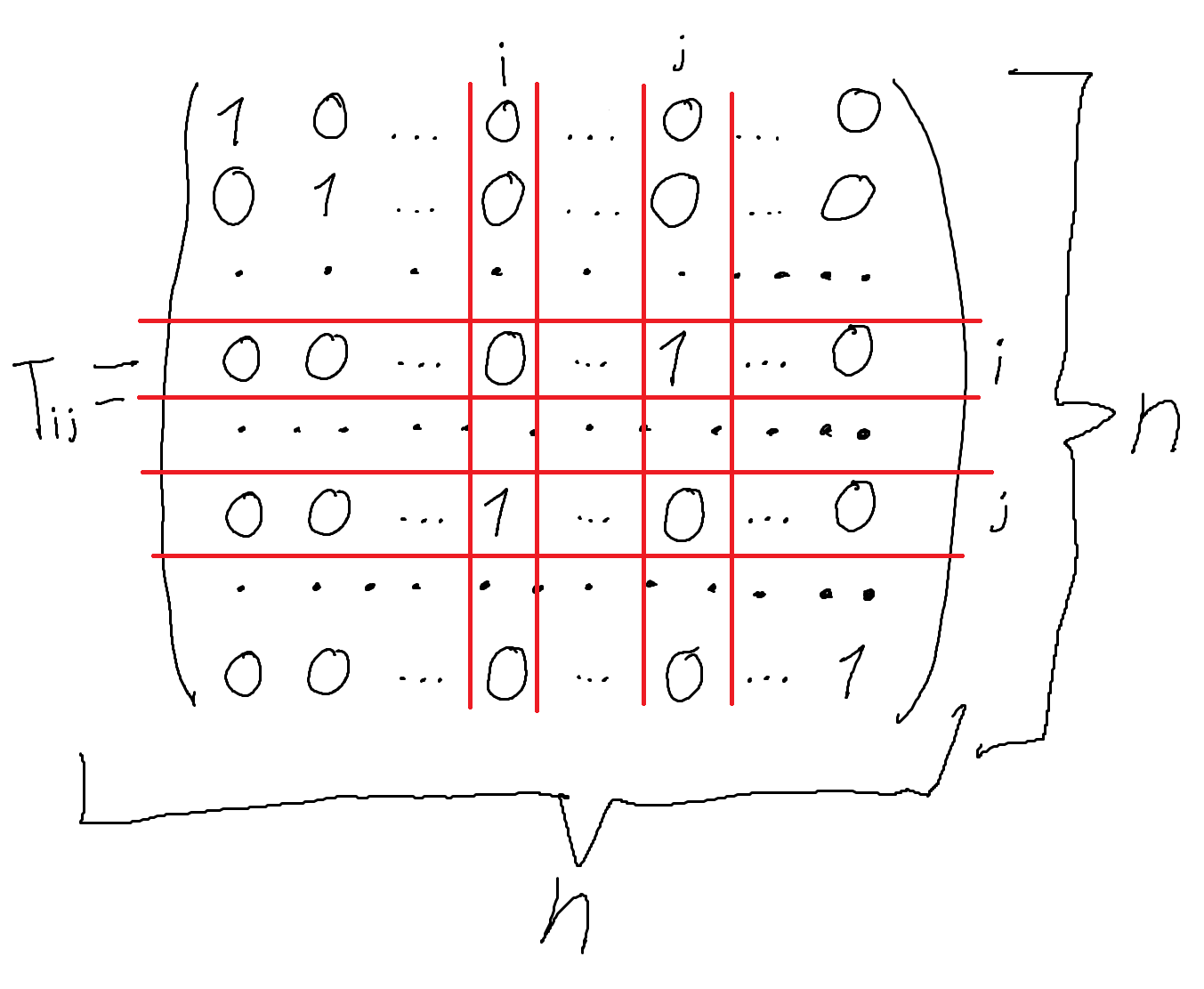


– единичная матрица, где элемент меняется на

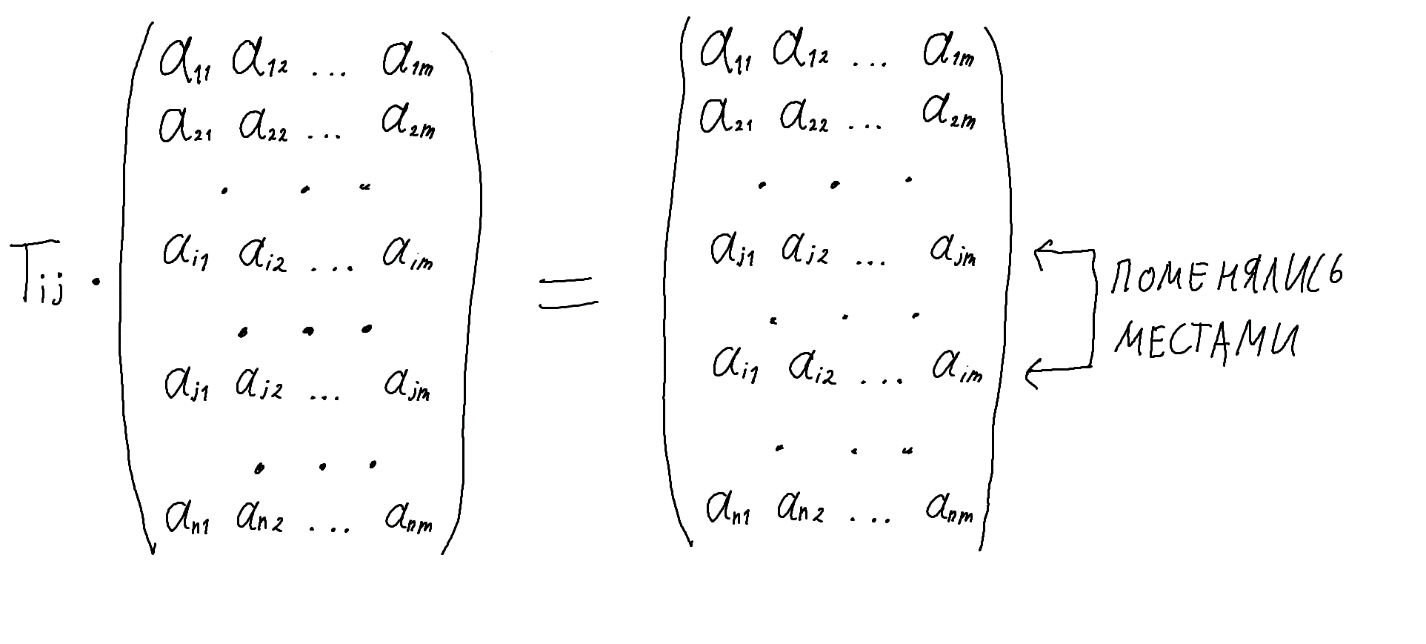


Что соответствует первому элементарному преобразованию

1. Элементарными матрицами **второго рода** называют матрицы вида:

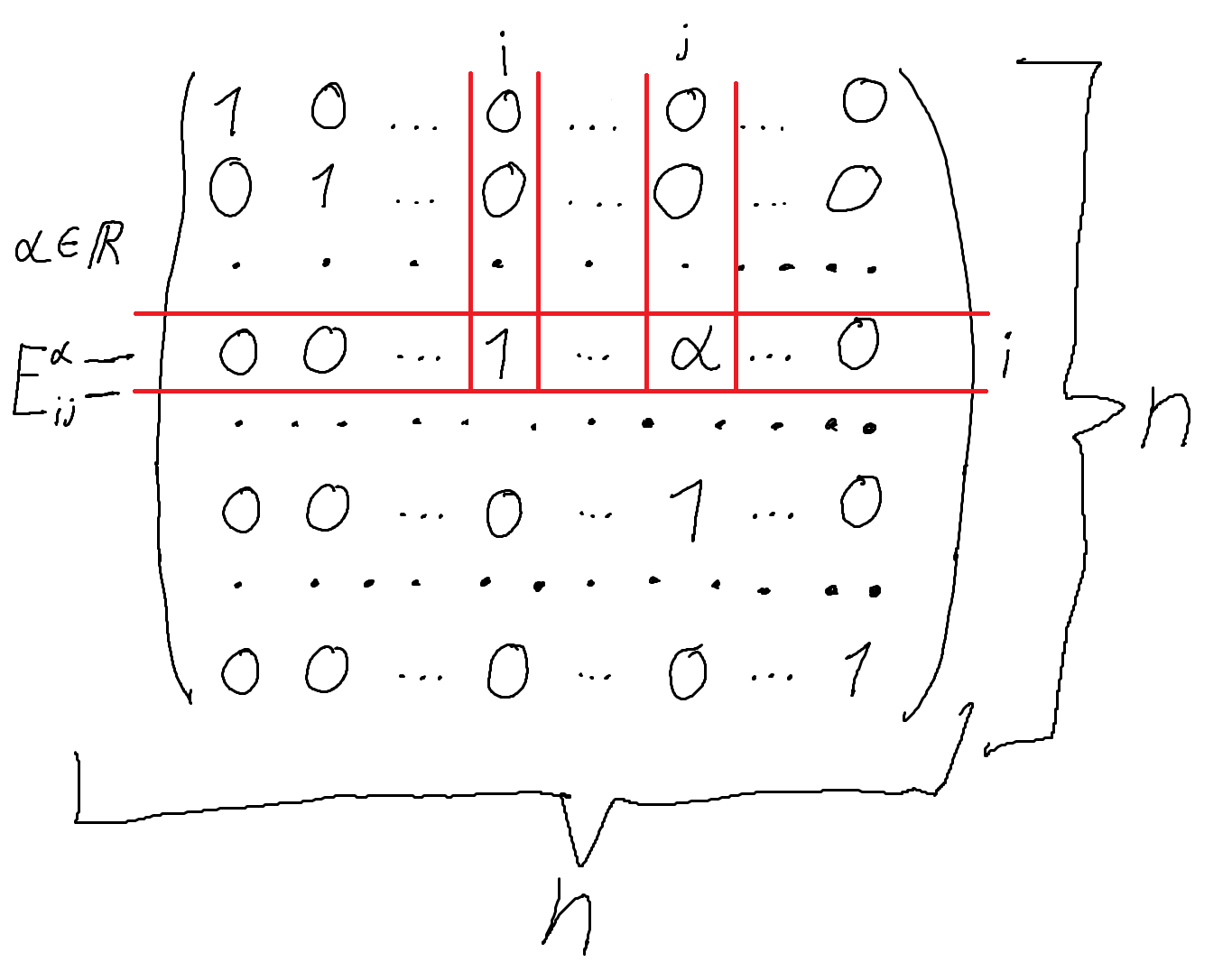


– это единичная матрица, где i-я и j-я строки поменяны местами.

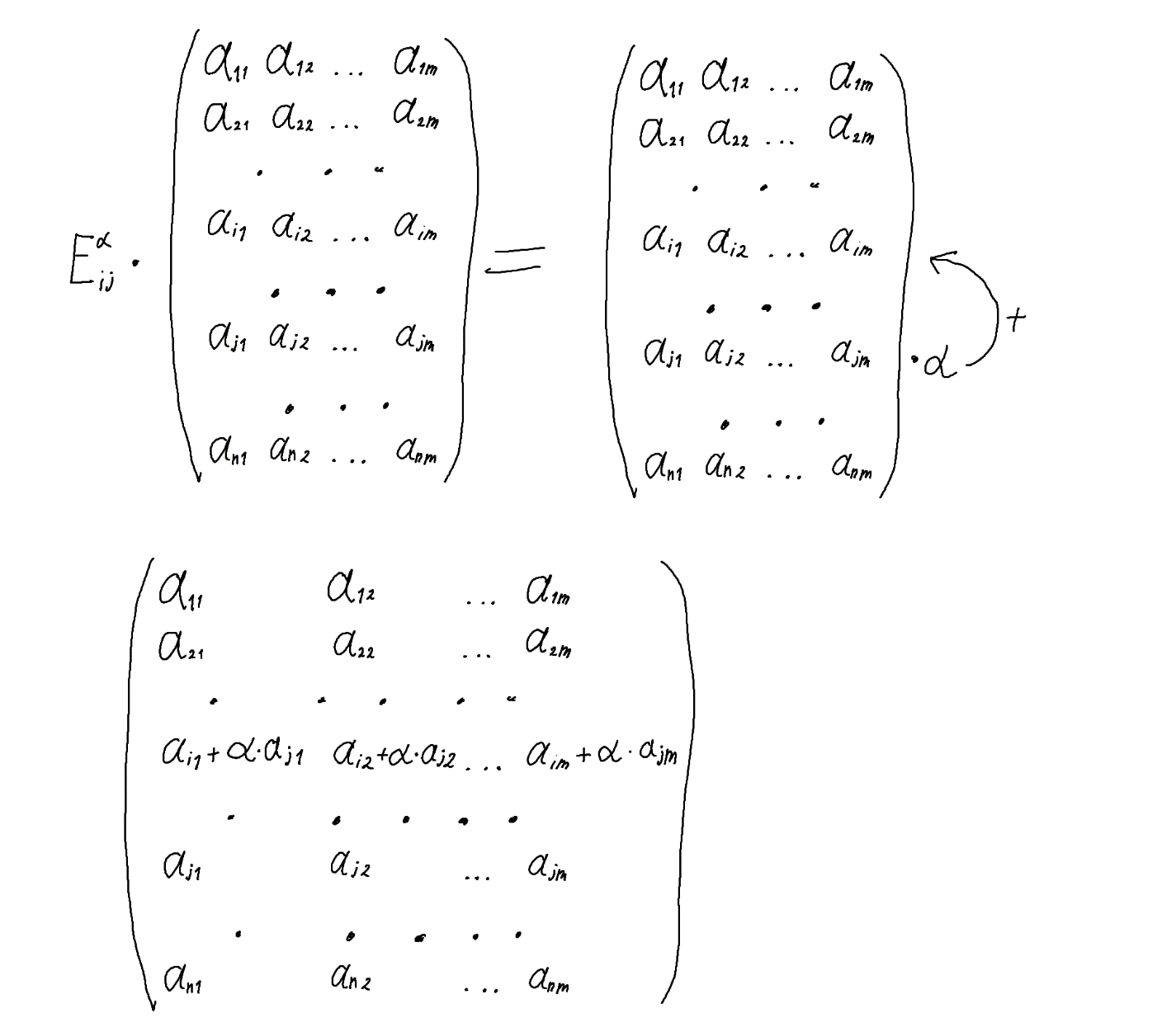


Что соответствует второму элементарному преобразованию

1. Элементарными матрицами **третьего рода** называют матрицы вида:



– единичная матрица, где () элемент меняется на

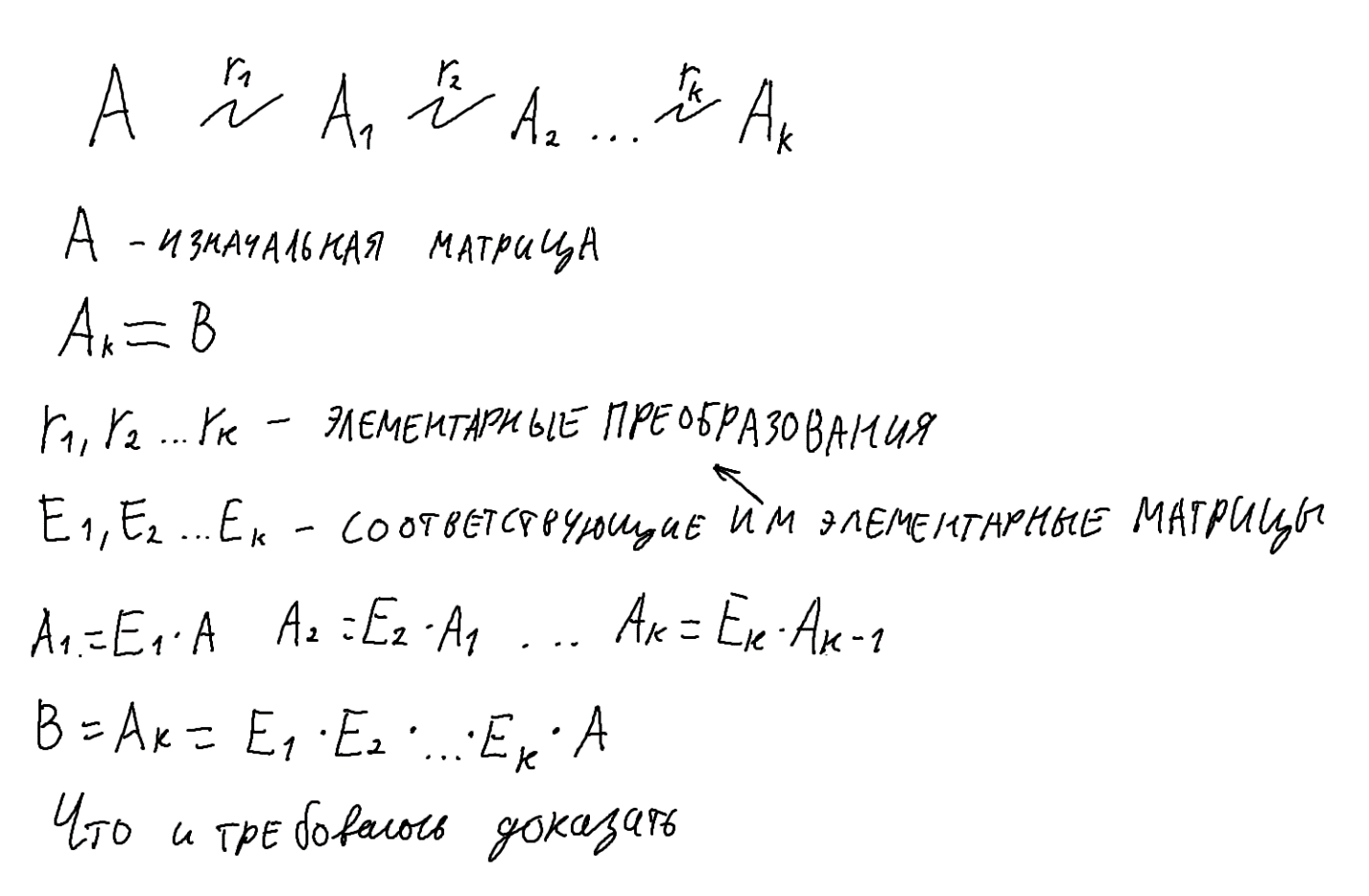
**

Что соответствует третьему элементарному преобразованию

**Теорема**

Если **A** и **B** – это матрицы порядка **n x m** и матрица **В** получается из матрицы **А** при помощи элементарных преобразований, то имеет место равенство , где – некоторые элементарные матрицы

**Доказательство:**



– элементарные преобразования

– соответствующие им элементарные преобразования

Тогда:

Тогда:

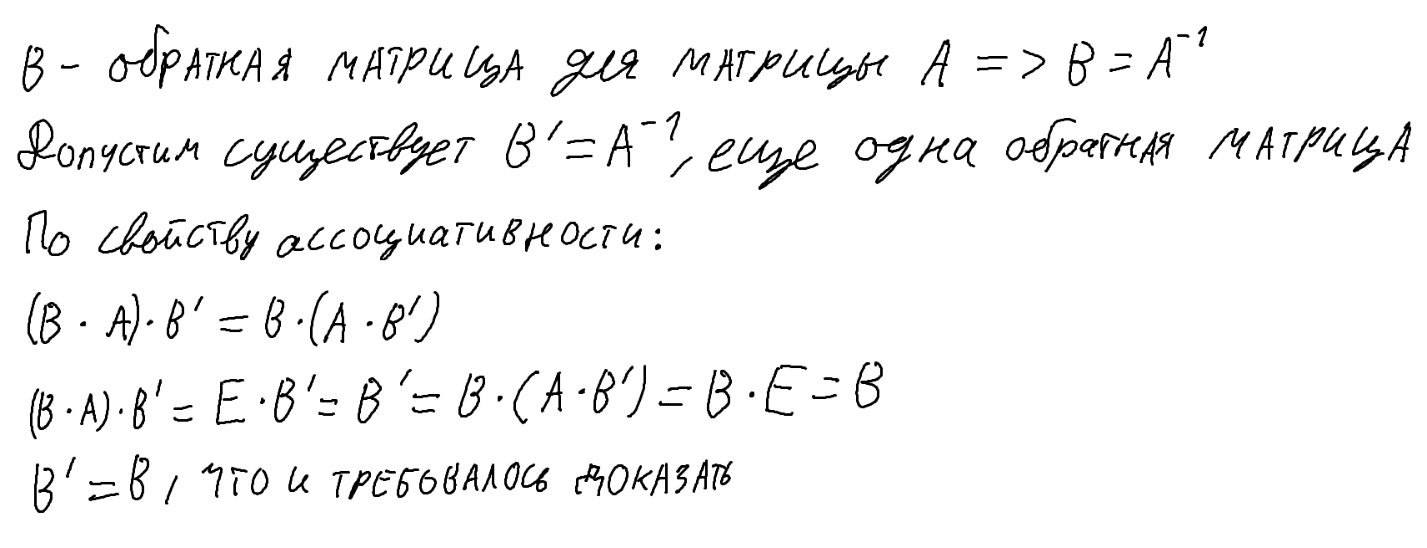
Что и требовалось доказать

## Нахождение обратных матриц с помощью элементарных преобразований

**Лемма:**

Если квадратная матрица А обратима (т.е. у нее есть обратная матрица), то обратная к ней матрица определена однозначно.

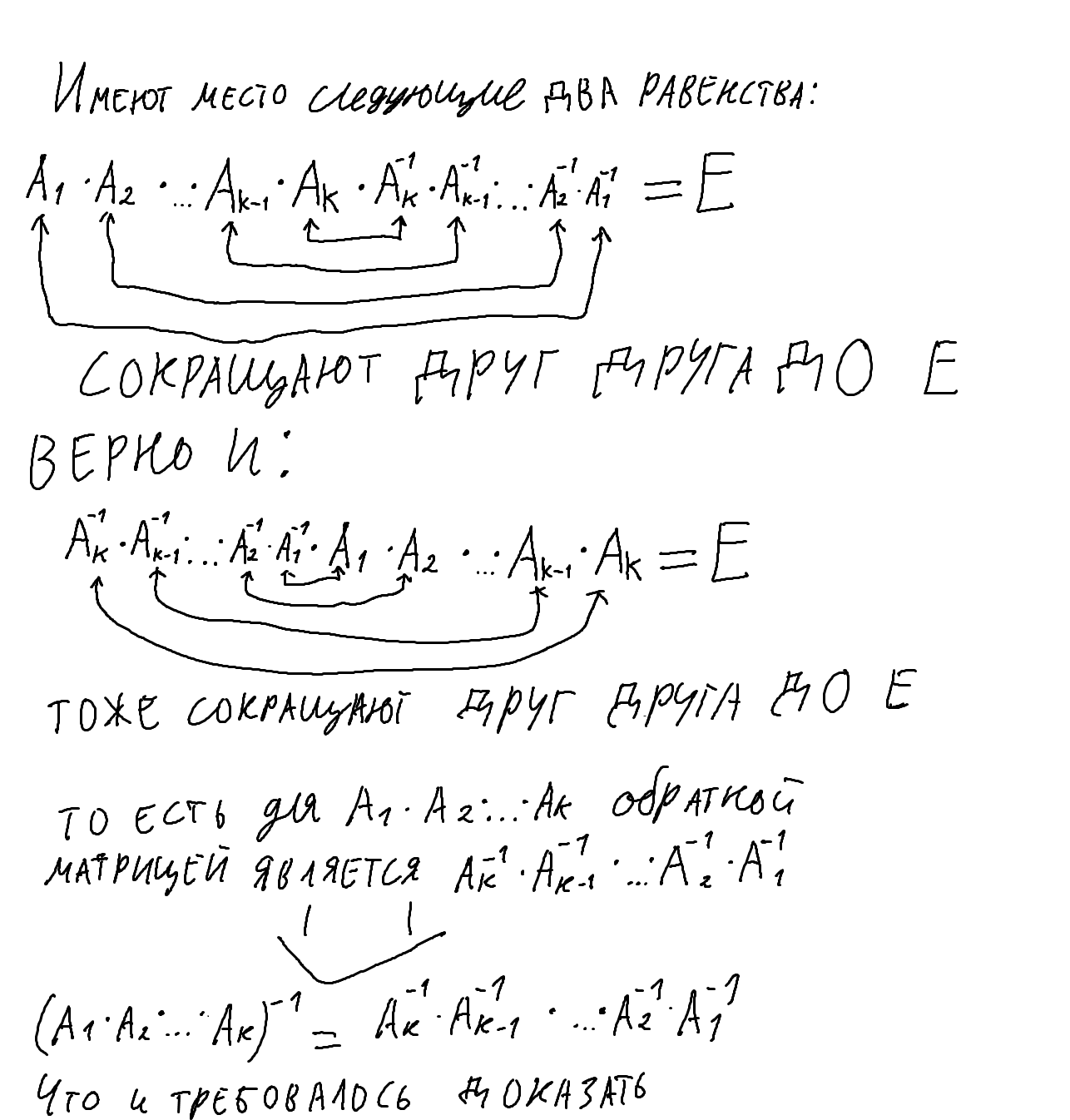
**Доказательство:**

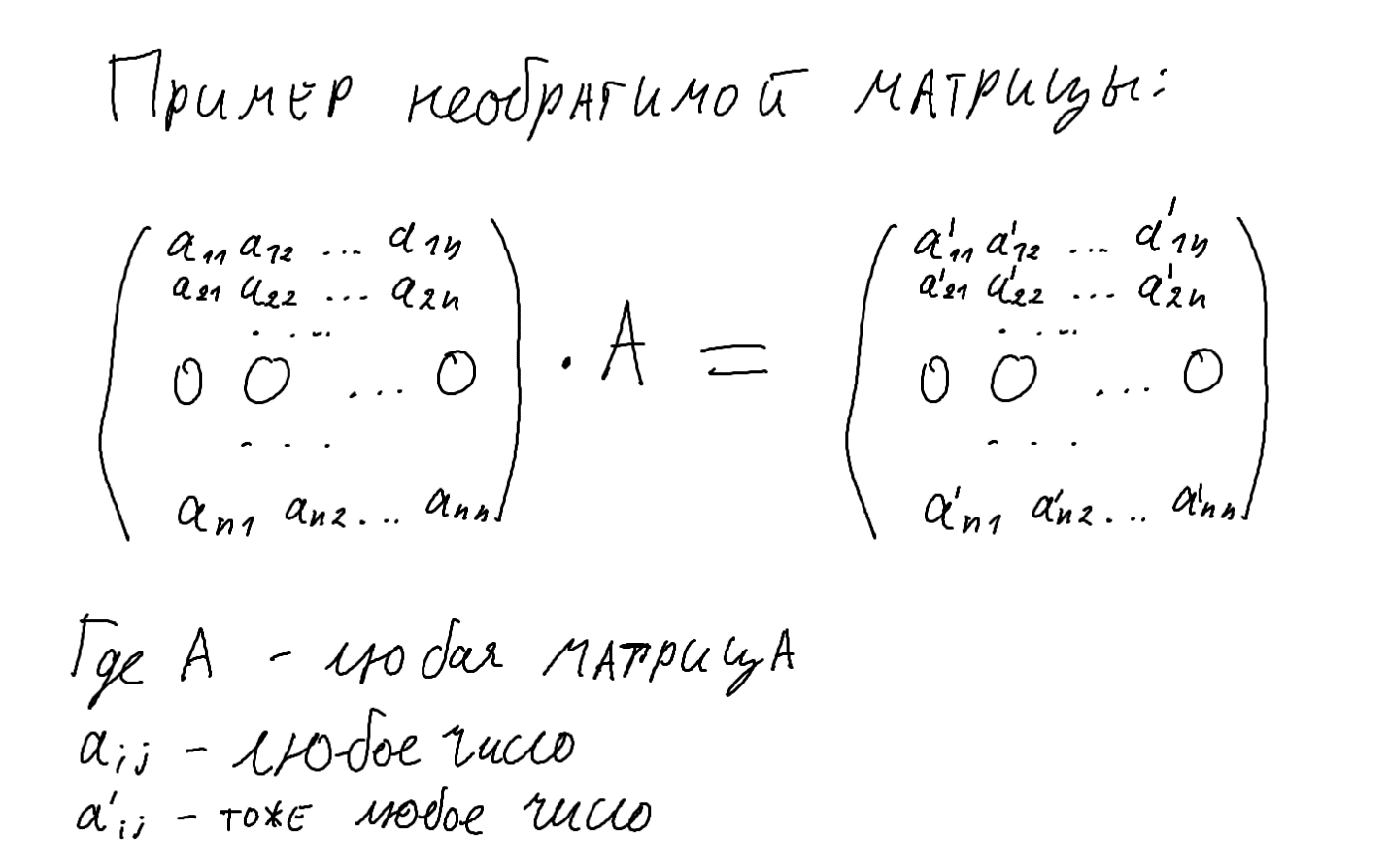


**Теорема:**

Если – обратимые матрицы, то их произведение тоже обратимая матрица, при этом имеет место следующее соотношение:

**Доказательство:**

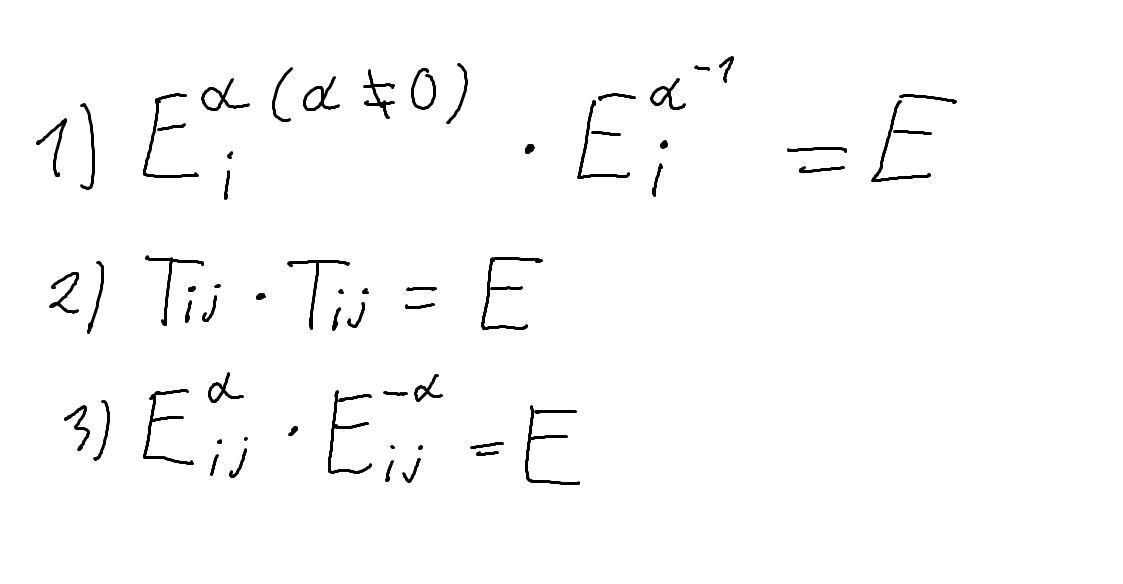




Для матрицы с **нулевой строкой** никогда не найдется обратной матрицы, потому что произведение такой матрицы с любой другой матрицей создает другую матрицу с **нулевой строкой**.

НЕЛЬЗЯ ПОЛУЧИТЬ ЕДИНИЧНУЮ МАТРИЦУ.

Всякая элементарная матрица



**Основная теорема:**

Квадратная матрица **А** обратная тогда и только тогда, когда в ее ступенчатом виде отсутствуют нулевые строки.

**Доказательство:**

**Необходимость:**

Пусть **А** – обратимая матрица и **А’** – матрица ступенчатого вида, полученная из матрицы **А** с помощью элементарных преобразований.

Тогда имеет место равенство:

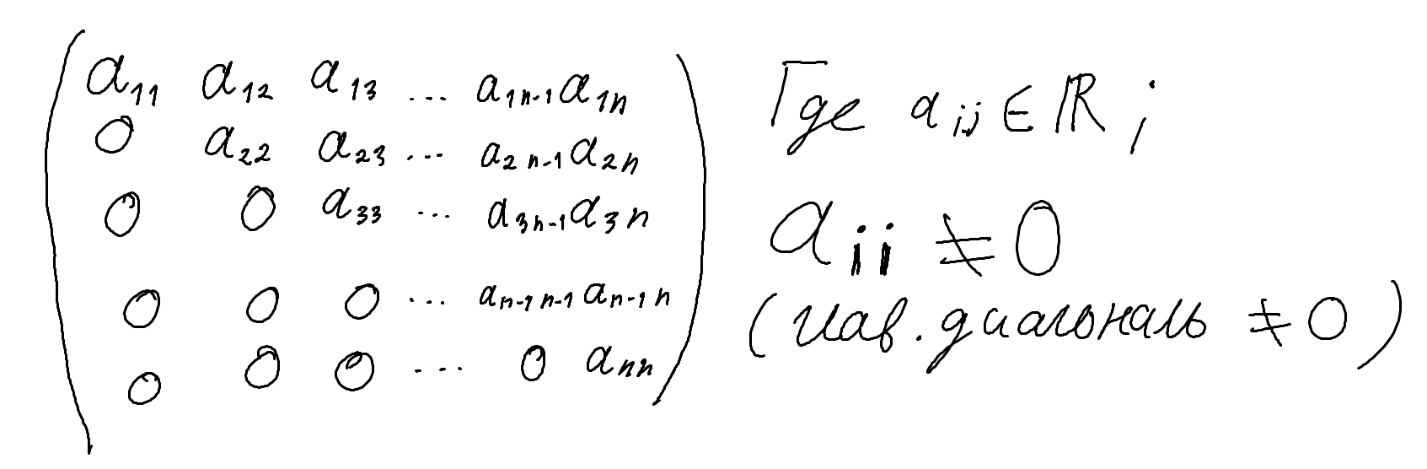
Т.к. – обратимые матрицы, **А** – тоже обратимая матрица, следовательно, **А’** тоже обратимая матрица.

То есть **A’** не содержит нулевых строк (т.к. матрица с нулевой строкой необратима)

**Достаточность:**

Предполагаем в любом ступенчатом виде

Пусть **А’** – матрица ступенчатого вида, которая получается из А с помощью элементарных преобразований. Тогда согласно условию **А’** имеет вид:



Следовательно, **А’** можно привести к **Е** (единичной матрице) с помощью элементарных преобразований (сводим все элементы выше главной диагонали к 0, затем перемножаем все строки так, чтобы из них получились 1)

Таким образом, имеет место:

То есть у **A’** есть обратная матрица:

Так как **А’** у нас получилась из **А** при помощи набора элементарных преобразований, допустим,

Тогда:

То есть:

Следовательно, матрица **А** обратима.

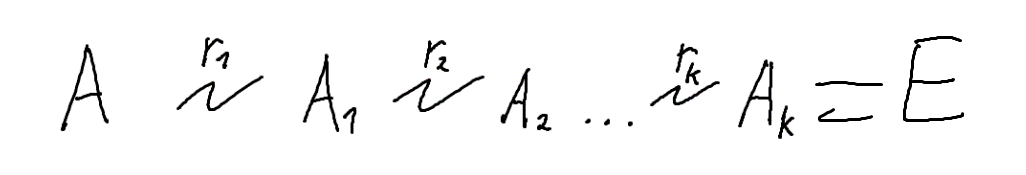
Некоторые условия обратимости матрицы:

1. Определитель ≠ 0
2. Если (произведение элементарных матриц)
3. Когда ступенчатый вид матрицы **А** = **Е** (единичной матрице)

## Метод нахождения обратных матриц с помощью элементарных матриц

Пусть А – обратимая матрица.

Тогда имеют место следующие элементарные преобразования (или последовательность элементарных преобразований)



Пусть – элементарные матрицы, соответствующие элементарным преобразованиям

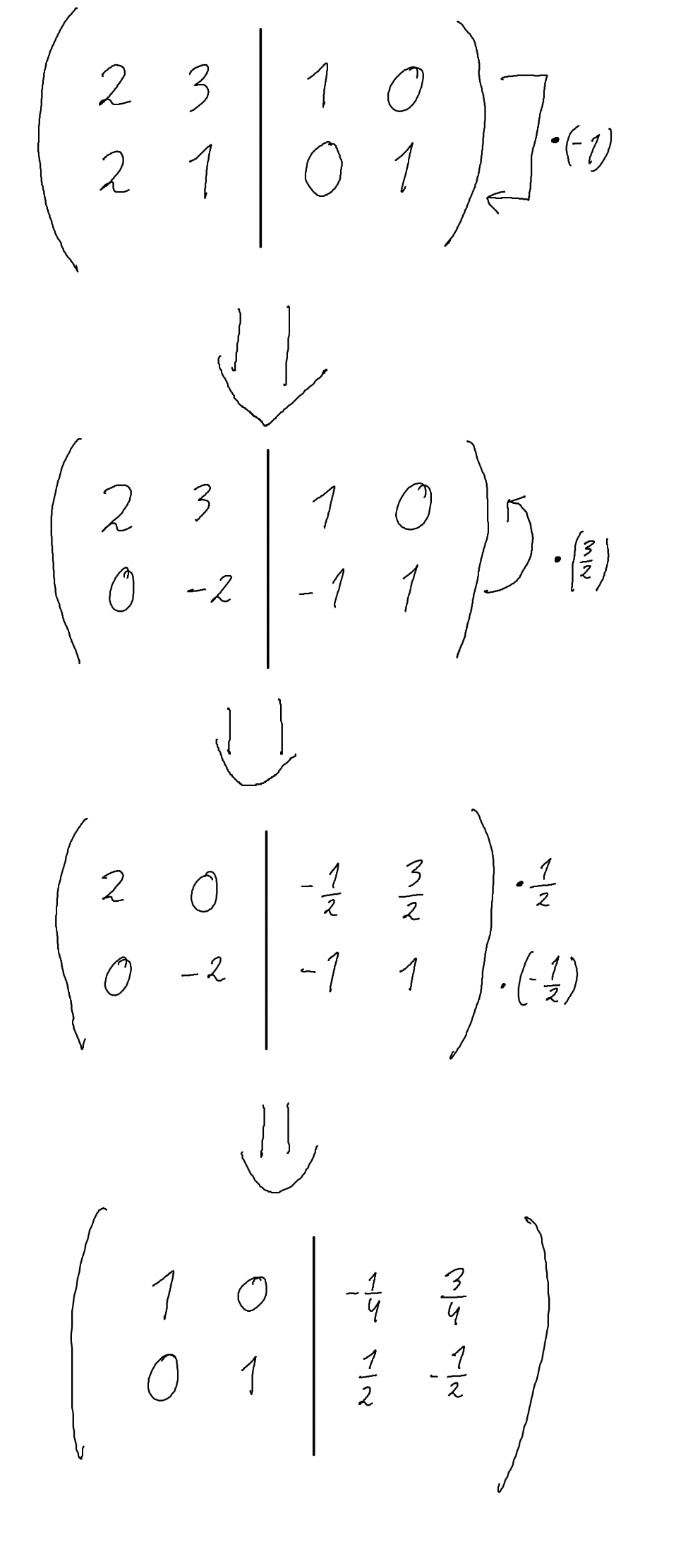
Тогда имеет место равенство:

Таким образом:

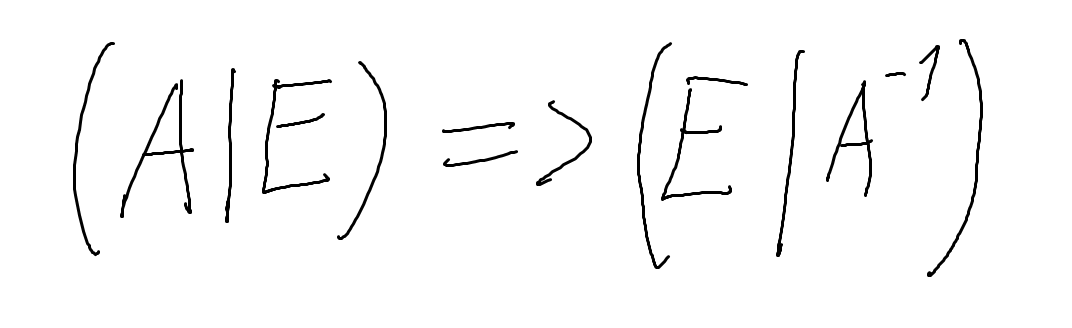
Или же:

То есть последовательность элементарных преобразований, которые матрицу **А** приводят к **Е** (единичной матрице), **Е** приводят к

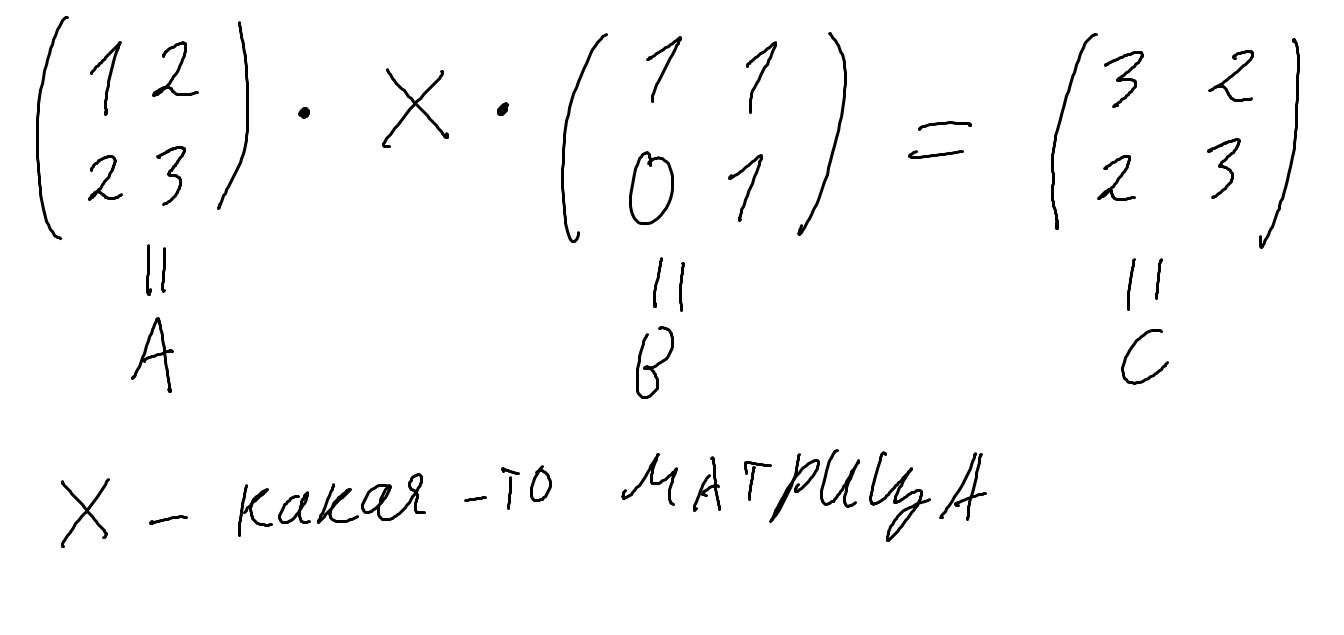
**ПРИМЕР**

****

**То есть мы получаем:**

****

## Метод решения матричных уравнений



Здесь получается уравнение:

Которое можно преобразовать в:

Из чего получается: